DM n°8 : fonctions et polynômes en tant que vecteurs

À rendre pour le mercredi 10 avril

Exercice 1 (ou Exercice 9 du TD 27–28)

On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ les fonctions définies par :

$$f_1(t) = \sin t \qquad f_2(t) = \cos t \qquad f_3(t) = t \sin t \qquad f_4(t) = t \cos t$$

Enfin on définit $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F. En déduire sa dimension.

2) On considère l'application $D : f \mapsto f'$. Montrer que D est un endomorphisme de F.

3) Déterminer $\mathrm{Ker}\, D$ et $\mathrm{Im}\, D$. Que peut-on en déduire sur D ?

Exercice 2 : Espaces supplémentaires et polynômes

On considère les polynômes de $E = \mathbb{R}_5[X]$ suivants :

$$P_1 = X^5 + X^4, \quad P_2 = X^5 + X, \quad P_3 = -X^5 + 3X^4 + 2X.$$

1) La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ?

2) On pose $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$. Montrer que $X \in F$.

3) On pose $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1)\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, puis de E.

4) Déterminer une base de G. *Indication :* déterminer une famille génératrice de G en raisonnant par équivalences à partir de l'assertion « $P \in G$ ».

5) Montrer que F et G sont en somme directe. Que vaut leur somme ?